

Ант.А. Колб, канд. техн. наук, К.Ю. Колб

(Украина, Днепрпетровск, Национальный горный университет)

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ В УСТРОЙСТВАХ С АВТОНОМНЫМИ ИНВЕРТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЯ

Введение. Создание эффективных автономных инверторов напряжения (АИН) с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) на полностью управляемых ключах и современных средств управления ими обуславливают широкое применение их в частотно-регулируемом электроприводе, а также для построения различных технических средств нормализации традиционных показателей качества электроэнергии.

Силовые (параллельные) активные компенсаторы (САК) выполненные на основе обращенных АИН с ШИМ, управляемые по мгновенным значениям мощности, позволяют с высокой точностью и быстродействием компенсировать неактивные составляющие полной мощности в системах с нелинейной и не симметричной динамической нагрузкой.

На ряду с существенными преимуществами устройств на основе АИН с ШИМ возникает ряд проблем, одной из которых является эффект «длинной линии». Высокое быстродействие АИН отрицательно влияет на переходные процессы в линии. Прохождение импульсов с крутым фронтом вызывает волновые процессы в линии, которые вызывают перенапряжение на входе потребителей.

Целью работы является преобразование исходных дифференциальных уравнений однородной линии с распределенными параметрами к виду, удобному для исследования волновых процессов в линии.

Материалы и результаты исследования. Для исследования установившихся и переходных электромагнитных процессов в линиях с распределенными параметрами основными уравнениями являются дифференциальные уравнения в частных производных, которые в обозначениях рис.1 имеют вид [1].

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i; \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial t} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 U, \quad (2)$$

где R_0, L_0, C_0, G_0 - соответственно продольное сопротивление, индуктивность, емкость и поперечная проводимость единицы длины линии.

Согласно (1) и (2) напряжение между проводами и ток в линии в каждый момент времени различны и являются функцией двух переменных: времени и расстояния x от начала отсчета.

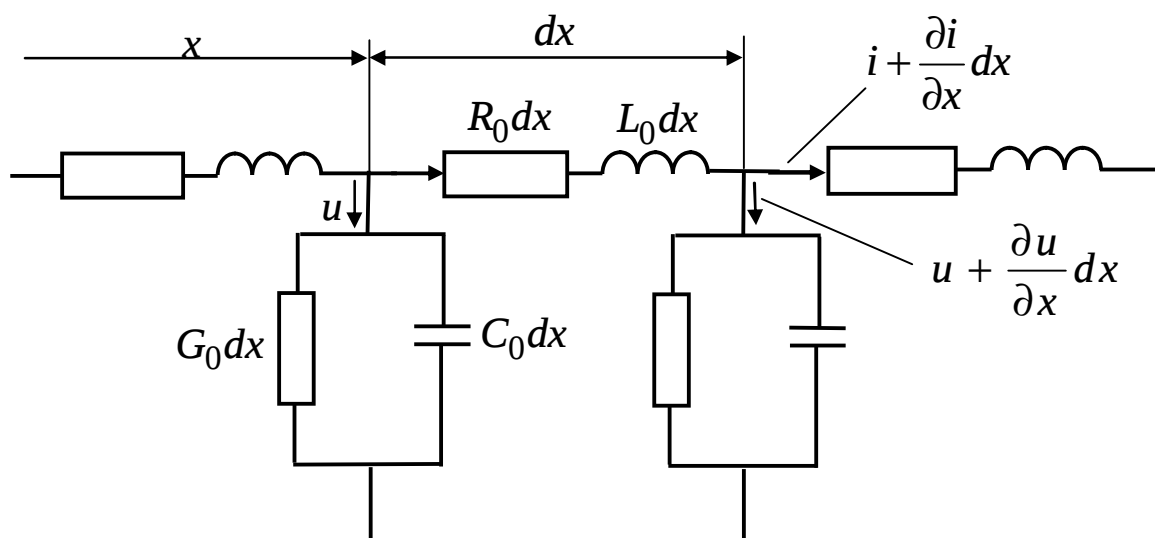


Рис.1. Расчетная схема однородной линии

На основании системы уравнений (1) и (2) можно получить уравнения, содержащие только искомую функцию $i(x,t)$ или $u(x,t)$. Для чего необходимо, например, продифференцировать (1) по t и умножить на C_0 , а (2) продифференцировать по x . В результате чего имеем

$$-C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C_0 R_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (3)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = G_0 \frac{\partial u}{\partial x} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}. \quad (4)$$

Произведя вычитание, получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C_0 R_0 \frac{\partial i}{\partial t} - G_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) значение частной производной из (1), находим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_0 G_0 i + (L_0 G_0 + C_0 R_0) \frac{\partial i}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Аналогичное уравнение можно записать для напряжения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 G_0 u + (L_0 G_0 + C_0 R_0) \frac{\partial u}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Приведенные зависимости (6) и (7) – это одномерные затухающие уравнения, которые могут быть преобразованы в уравнения процесса колебаний, распространяющихся со скоростью, отличной от скорости света.

Если к зажимам линии приложено синусоидальное напряжение, угловая

частота которого ω , то при применении символического метода расчета изображения напряжения и тока:

$$u = U_m \sin(\omega t + j_u) \rightarrow \underline{U} e^{j\omega t}; \quad (8)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + j_i) \rightarrow \underline{I} e^{j\omega t}, \quad (9)$$

где $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{jj_u}$; $\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{jj_i}$ - комплексы действующих значений напряжения и тока.

При этом комплексы $\underline{U}$ и $\underline{I}$ являются функциями расстояния и не зависят от времени, а множитель $e^{j\omega t}$ наоборот есть функция только времени.

Согласно (8)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = j\omega \underline{U} e^{j\omega t} = j\omega u; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\underline{U} \omega^2 e^{j\omega t} = -\omega^2 u. \quad (11)$$

Откуда

$$u = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (12)$$

При этом с учетом (10) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = j\omega u = -\frac{j}{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (7), имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (C_0 - \frac{jG_0}{\omega})(L_0 - \frac{jR_0}{\omega}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Аналогичное выражение можно записать для тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = (C_0 - \frac{jG_0}{\omega})(L_0 - \frac{jR_0}{\omega}) \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Известно, что уравнения (14) и (15) являются волновыми вида

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2},$$

т.е. уравнениями процесса колебаний, распространяющихся со скоростью

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{(C_0 - jG_0/w)(L_0 - jR_0/w)}}, \quad (16)$$

отличной от скорости света, которая в общем случае является комплексной [2]

$$v_k = C / (n - ja), \quad (17)$$

где $n - ja$ - комплексный показатель скорости распространения волны; $C = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость распространения света в воздухе; a - коэффициент затухания амплитуды; n - показатель преломления.

Из (17) видно, что в линии без потерь ($a = 0; n = 1$) волны распространяются со скоростью света ($v = 1 / \sqrt{L_0 C_0} \approx C / n = C / \sqrt{\chi m}$), где χ, m - относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости.

С учетом потерь в линии параметры n и a могут быть определены из совместного решения уравнений (16) и (17)

$$\left(\frac{n - ja}{C}\right)^2 = (C_0 - jG_0/w)(L_0 - jR_0/w). \quad (18)$$

Раскрыв скобки и приравняв действительные и мнимые части, получим

$$(w^2 / C^2)(n^2 - a^2) = C_0 L_0 w^2 - G_0 R_0; \quad (19)$$

$$w^2 2na / C^2 = C_0 R_0 w + G_0 L_0 w. \quad (20)$$

Из совместного решения приведенных уравнений имеем

$$2n^2 / C^2 = A / w^2 + C_0 L_0 - G_0 R_0 / w^2; \quad (21)$$

$$2a^2 / C^2 = A / w^2 - C_0 L_0 + R_0 G_0 / w^2, \quad (22)$$

где обозначено $A = \sqrt{(G_0^2 + w^2 C_0^2)(R_0^2 + w^2 L_0^2)}$.

Уравнение (14), например, для прямой (падающей) волны допускает частное решение вида [3]

$$u_1 = U_1 e^{j\omega(t-x/v_k)}, \quad (23)$$

так как подстановка в (14) производных из (23) дает тождество.

Выражение (23) с учетом (17) можно записать в таком виде

$$u_1 = U_1 e^{j\omega(t-x/v_k)} = U_1 e^{j\omega t} e^{-j\omega x(n-j a)/C} = U_1 e^{-kx} e^{j\omega(t-x/v)}, \quad (24)$$

где обозначено: $k = \omega a / C$; $v = C / n$.

На основании (21) и (22) находим

$$v = \frac{C}{n} = \frac{\omega \sqrt{2}}{\sqrt{A - R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0}}; \quad (25)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A + R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0}. \quad (26)$$

Согласно (24) напряжение вдоль линии в функции времени

$$u_1 = U_{m1} e^{-kx} \sin(\omega t - b x + j_u), \quad (27)$$

где j_u - начальная фаза напряжения; $\omega / v = b$ - коэффициент фазы.

Аналогичное выражение можно записать для тока в линии

$$i_1 = I_{m1} e^{-kx} \sin(\omega t - b x + j_u + j_\epsilon). \quad (28)$$

Подставляя в (1) и (2) напряжение и ток из (27) и (28) и их производные, получим

$$\frac{U_{m1}}{I_{m1}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\sqrt{R_0^2 + \omega^2 L_0^2} e^{jj}}{\sqrt{G_0^2 + \omega^2 C_0^2} e^{jy}}} = Z_\epsilon = z_\epsilon e^{j j_\epsilon}, \quad (29)$$

где $Z_\epsilon = z_\epsilon e^{j j_\epsilon}$ - волновое сопротивление, его модуль и аргумент.

Согласно (29)

$$Z_\epsilon = \sqrt[4]{\frac{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}}; j = \arctg \frac{\omega L_0}{R_0}; y = \arctg \frac{\omega C_0}{G_0}; j_\epsilon = \frac{\arctg j - \arctg y}{2}.$$

$$\text{Или } j_\epsilon = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega L_0 G_0 - \omega C_0 R_0}{R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0}.$$

Уравнения (27) и (28) дают возможность по заданным начальным и граничным условиям найти для прямой волны напряжение и ток в линии как в функции расстояния, так и времени.

Рассматривая напряжение линии как сумму двух составляющих прямой и обратной волн (падающей и отраженной) $u = u_1 + u_2$, можно записать для обратной волны

$$u_2 = U_{m2} e^{kx} \sin(\omega t + b x + j_{u2}). \quad (30)$$

Обратная волна представляет собой волну такой же длины $l = 2p / b$, как и прямая, бегущую от конца линии к ее началу. Амплитуда этой волны возрастает по показательному закону (наличие множителя e^{kx}) от начала линии к ее концу и, следовательно, затухает по показательному закону по мере продвижения волны от конца линии к ее началу.

По аналогии с напряжением ток также можно рассматривать как результат наложения двух затухающих синусоидальных волн, бегущих навстречу друг другу. Поэтому реальная картина распределения напряжения и тока в линии в данный момент времени получается алгебраическим суммированием обеих волн для этого момента времени.

Список литературы

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1973.-752с.
2. Аркадьев В. К. Электромагнитные процессы в металлах//Ч.2. Применение теории Максвелла к исследованию металлов в электротехнике. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 304 с.
3. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике. – М.: 1973. – 832 с.